數學傳播　49卷2期, pp. 91-101

n 次反三角函數之不定積分

李坤應

壹、前言

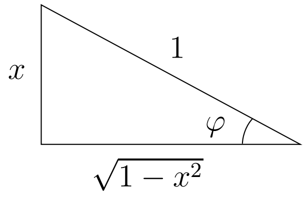
筆者在查閱不定積分表時曾看到許多關於反三角函數的不定積分表達式, 但多爲 1 次或 2 次的不定積分, 受興趣使然, 筆者查詢了探討 n 次反三角函數積分相關的文獻後發現相關研究甚少, 僅有一篇給出其遞迴形式的貼文 [2]。因此, 本文旨在探究 n 次反三角函數 $\arcsin^n(x)$ 和 $\arccos^n(x)$ 的不定積分, 並嘗試給出閉式表達式 (closed-form expressions)。

貳、文獻探討

對於 $n=1$ 的情況, 可通過分部積分法解決 [3] [4]。以下 C 所指皆爲常數。

一、反正弦函數 $\arcsin(x)$ 之不定積分

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\mathrm{d}x &= x\cdot\arcsin(x) - \int x\mathrm{d}(\arcsin(x))\\ &= x\cdot\arcsin(x) - \int \sin\left(\arcsin(x)\right)\mathrm{d}(\arcsin(x))\\ &= x\cdot\arcsin(x) + \cos\left(\arcsin(x)\right) + C.\end{aligned}$$



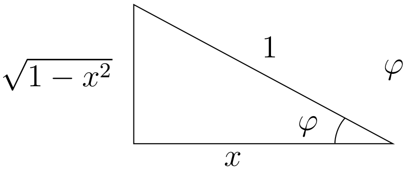
$\varphi = \arcsin(x)$

由圖可知,

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

二、反餘弦函數 arccos(x)之不定積分

$$
\begin{aligned}
\int \arccos(x)\mathrm{d}x &= x\cdot\arccos(x) - \int x\mathrm{d}(\arccos(x)) \\
&= x\cdot\arccos(x) - \int \cos(\arccos(x))\mathrm{d}(\arccos(x)) \\
&= x\cdot\arccos(x) - \sin(\arccos(x)) + C.
\end{aligned}
$$



$\varphi = \arccos(x)$

由圖可知,

$$\int \arccos(x)\mathrm{d}x = x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C.$$

參、研究分析與結果

對於下文 定理 **1** 和 定理 **3** 我們可採取兩種方法求得:

1. 運用換元與分部積分將反三角函數積分問題轉化爲三角函數積分從而簡化問題。
2. 先嘗試尋找其遞迴形式, 再不斷代入求解。

定理 1:

$$\int \arcsin^n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{n-i} + C.$$

證明:

(一)、方法一

$$
\begin{aligned}
I &= \int \arcsin^n(x)\mathrm{d}x \\
&= x\cdot\arcsin^n(x) - n\int x\arcsin^{n-1}(x)\mathrm{d}\left(\arcsin(x)\right).
\end{aligned}
$$

令 $\varphi = \arcsin(x)$並運用分部積分:

$$I = x\cdot\arcsin^n(x) - n\int \sin(\varphi)\cdot\varphi^{n-1}\mathrm{d}\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= x\cdot\arcsin^n(x) + n\int \varphi^{n-1}\mathrm{d}\,(\cos\varphi)\\
&= x\cdot\arcsin^n(x) + n\varphi^{n-1}\cos\varphi - n(n-1)\int \varphi^{n-2}\mathrm{d}\,(\sin\varphi)\\
&= x\cdot\arcsin^n(x) + n\varphi^{n-1}\cos\varphi - n(n-1)\varphi^{n-2}\sin\varphi - n(n-1)(n-2)\int \varphi^{n-3}\mathrm{d}(\cos\varphi)\\
&= x\cdot\arcsin^n(x) + n\varphi^{n-1}\cos\varphi - n(n-1)\varphi^{n-2}\sin\varphi - n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\cos\varphi\\
&\quad + n(n-1)(n-2)(n-3)\int \varphi^{n-4}\mathrm{d}(\sin\varphi)\\
&= \cdots\\
&= x\cdot\arcsin^n(x) + \sum_{i=1}^{n} P_i^n \sin(\varphi + \frac{i\pi}{2})\cdot\varphi^{n-i} + C\\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{n-i} + C.
\end{aligned}
$$

(二)、方法二

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \arcsin^n(x)\mathrm{d}x\\
&= x\arcsin^n(x) - n\int \arcsin^{n-1}(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &\xlongequal{t=1-x^2} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\
&= -\sqrt{t} + C\\
&= -\sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\begin{aligned}
I_n &= x\arcsin^n(x) + n\int \arcsin^{n-1}(x)\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})\\
&= x\arcsin^n(x) + n\arcsin^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(\arcsin^{n-1}(x))\\
&= x\arcsin^n(x) + n\arcsin^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n\int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{(n-1)\arcsin^{n-2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= x\arcsin^n(x) + n\arcsin^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\int \arcsin^{n-2}(x)\mathrm{d}x\\
&= x\arcsin^n(x) + n\arcsin^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2}.
\end{aligned}
$$

至此, 我們得到了關於 I_n 的二階遞迴式, 我們可以反復遞迴以正向求解, 也可利用此式結合數學歸納法證明結論。

我們先嘗試正向求解:

$$\begin{aligned}I_n &= x\arcsin^n(x)+n\arcsin^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2}-n(n-1)[x\arcsin^{n-2}(x)+\\&\quad (n-2)\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-3}(x)-(n-2)(n-3)I_{n-4}]\\&=\sin(\arcsin(x))\arcsin^n(x)+n\sin(\arcsin(x)+\frac{\pi}{2})\arcsin^{n-1}(x)\\&\quad +n(n-1)\sin(\arcsin(x)+\pi)\arcsin^{n-2}(x)\\&\quad +n(n-1)(n-2)\sin(\arcsin(x)+\frac{3\pi}{2})+\cdots\\&=\sum_{i=0}^{n}P_i^n\sin\left(\arcsin(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{n-i}+C.\end{aligned}$$

相應的, 我們嘗試利用數學歸納法:

當 $n=1$ 時, 由文獻探討中的計算, 我們知道:

$$\int\arcsin(x)\mathrm{d}x=x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C,$$

而

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{i=0}^{1}P_i^1\sin\left(\arcsin(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{1-i}+C\\&=\sin(\arcsin(x))\cdot\arcsin(x)+\sin\left(\arcsin(x)+\frac{\pi}{2}\right)+C\\&=x\cdot\arcsin(x)+\cos(\arcsin(x))+C\\&=x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C,\end{aligned}$$

即 $n=1$ 時結論成立。

當 $n=2$ 時, 由上文的二階遞迴式我們得到:

$$\begin{aligned}\int\arcsin^2(x)\mathrm{d}x&=x\arcsin^2(x)+2\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)-2I_0\\&=x\arcsin^2(x)+2\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)-2x+C,\end{aligned}$$

而

$$I_2=\sum_{i=0}^{2}P_i^2\sin\left(\arcsin(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{2-i}+C$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\left(\arcsin(x)\right)\arcsin^2(x) + 2\sin\left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}\right)\arcsin(x) \\
&\quad + 2\sin\left(\arcsin(x) + \pi\right) + C \\
&= x\arcsin^2(x) + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin(x) - 2x + C,
\end{aligned}
$$

即 $n = 2$ 時結論也成立。

假設 $n = k - 2$ 時結論成立, 即

$$I_{k-2} = \sum_{i=0}^{k-2} P_i^{k-2} \sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{k-2-i} + C.$$

結合上文的二階遞迴式, 我們有

$$
\begin{aligned}
I_k &= x\arcsin^k(x) + k\arcsin^{k-1}(x)\sqrt{1-x^2} - k(k-1)I_{k-2} \\
&= x\arcsin^k(x) + k\arcsin^{k-1}(x)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad - k(k-1)\sum_{i=0}^{k-2} P_i^{k-2}\sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{k-2-i} + C \\
&= x\arcsin^k(x) + k\arcsin^{k-1}(x)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-2} P_{i+2}^{k}\sin\left(\arcsin(x) + \frac{(i+2)\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{k-(i+2)} + C \\
&= x\arcsin^k(x) + k\arcsin^{k-1}(x)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} P_i^{k}\sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{k-i} + C \\
&= \sum_{i=0}^{k} P_i^{k}\sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{k-i} + C.
\end{aligned}
$$

即若 $n = k - 2$ 時結論成立, 則 $n = k$ 時結論亦成立, 又 $n = 1, 2$ 時結論成立, 我們可以得到 $\forall n \in \mathbb{N}$, 結論皆成立。

定理 2:

$$\int \arcsin^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x = a \cdot \sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(\frac{x}{a}))^{n-i} + C.$$

證明:

$$I = \int \arcsin^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&= a\cdot\int \arcsin^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}(\frac{x}{a})\\&= a\cdot\sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(\frac{x}{a})+\frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(\frac{x}{a}))^{n-i}+C.\end{aligned}$$

定理 3:

$$\int \arccos^n(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n} P_i^n \cos\left(\arccos(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(x))^{n-i}+C.$$

證明:

(一)、方法一

$$\begin{aligned}I&=\int \arccos^n(x)\mathrm{d}x\\&= x\cdot\arccos^n(x)-n\int x\arccos^{n-1}(x)\mathrm{d}(\arccos(x)).\end{aligned}$$

令 $\varphi=\arccos(x)$ 並運用分部積分:

$$\begin{aligned}I&= x\cdot\arccos^n(x)-n\int \cos(\varphi)\cdot\varphi^{n-1}\mathrm{d}\varphi\\&= x\cdot\arccos^n(x)-n\int \varphi^{n-1}\mathrm{d}(\sin\varphi)\\&= x\cdot\arccos^n(x)-n\varphi^{n-1}\sin\varphi-n(n-1)\int\varphi^{n-2}\mathrm{d}(\cos\varphi)\\&= x\cdot\arccos^n(x)-n\varphi^{n-1}\sin\varphi-n(n-1)\varphi^{n-2}\cos\varphi+\\&\quad n(n-1)(n-2)\int\varphi^{n-3}\mathrm{d}(\sin\varphi)\\&=\cdots\\&= x\cdot\arccos^n(x)+\sum_{i=1}^{n}P_i^n\cos(\varphi+\frac{i\pi}{2})\cdot\varphi^{n-i}+C\\&= x\cdot\arccos^n(x)+\sum_{i=1}^{n}P_i^n\cos\left(\arccos(x)+\frac{i\pi}{2}\right)\cdot(\arccos(x))^{n-i}+C\\&=\sum_{i=0}^{n}P_i^n\cos\left(\arccos(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(x))^{n-i}+C.\end{aligned}$$

(二)、方法二

$$\begin{aligned} I_n &= \int \arccos^n(x)\mathrm{d}x \\ &= x\arccos^n(x) + n\int \arccos^{n-1}(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

我們知道:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

因此:

$$\begin{aligned} I_n &= x\arccos^n(x) - n\int \arccos^{n-1}(x)\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2}) \\ &= x\arccos^n(x) - n\arccos^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} + n\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(\arccos^{n-1}(x)) \\ &= x\arccos^n(x) - n\arccos^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{(n-1)\arccos^{n-2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x\arccos^n(x) - n\arccos^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\int\arccos^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= x\arccos^n(x) - n\arccos^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

至此, 我們得到了關於I_n的二階遞迴式, 類似的, 我們可以反復遞迴以正向求解, 也可利用此式結合數學歸納法, 而後者在前文已介紹, 此處不再贅述。

$$\begin{aligned} I_n &= x\arccos^n(x) - n\arccos^{n-1}(x)\sqrt{1-x^2} - n(n-1)[x\arccos^{n-2}(x) - \\ &\quad (n-2)\sqrt{1-x^2}\arccos^{n-3}(x) - (n-2)(n-3)I_{n-4}] \\ &= \cos(\arccos(x))\arccos^n(x) + n\cos(\arccos(x)+\frac{\pi}{2})\arccos^{n-1}(x) \\ &\quad + n(n-1)\cos(\arccos(x)+\pi)\arccos^{n-2}(x) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)\cos(\arccos(x)+\frac{3\pi}{2}) + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{n} P_i^n \cos\left(\arccos(x)+\frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(x))^{n-i} + C. \end{aligned}$$

定理 4:

$$\int \arccos^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x = a\cdot\sum_{i=0}^{n} P_i^n\cos\left(\arccos(\frac{x}{a})+\frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(\frac{x}{a}))^{n-i} + C.$$

證明:

$$\begin{aligned}
I &= \int \arccos^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x \\
&= a\cdot\int \arccos^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}(\frac{x}{a}) \\
&= a\cdot\sum_{i=0}^{n} P_i^n \cos\left(\arccos(\frac{x}{a})+\frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(\frac{x}{a}))^{n-i}+C.
\end{aligned}$$

對於定理 3 和定理 4, 我們運用換元、分部積分後結合 Fubini-Tonelli 定理將求和與積分換序進而求解。

定理 5:

$$\int x^{2n}\arcsin(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}}+C.$$

證明:

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int x^{2n}\arcsin(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2n+1}\int \arcsin(x)\mathrm{d}(x^{2n+1}) \\
&= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\int x^{2n+1}\mathrm{d}(\arcsin(x)).
\end{aligned}$$

令 $\varphi=\arcsin(x)$,

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\int \sin^{2n+1}\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int \sin^{2n}\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi).
\end{aligned}$$

令 $t=\cos\varphi=\cos\left(\arcsin(x)\right)=\sqrt{1-x^2}$,

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int (1-t^2)^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int \sum_{i=0}^{n} C_i^n(-t^2)^i\mathrm{d}t. \qquad (*)
\end{aligned}$$

注意到:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^n\int t^{2i}\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n} C_i^n\cdot\frac{1}{2i+1}t^{2i+1}+C$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} C_i^n \cdot \frac{1}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

因此, 由 Fubini-Tonelli 定理 [1], $(*)$ 式中的求和與積分順序可以互換:

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \int (-t^2)^i \mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1} t^{2i+1} + C \\
&= \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

定理 6:

$$
\int x^{2n}\arccos(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C.
$$

證明:

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \int x^{2n}\arccos(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2n+1}\int \arccos(x)\mathrm{d}(x^{2n+1}) \\
&= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int x^{2n+1}\mathrm{d}(\arccos(x)).
\end{aligned}
$$

令 $\varphi = \arccos(x)$,

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int \cos^{2n+1}\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int \cos^{2n}\varphi \mathrm{d}(\sin\varphi).
\end{aligned}
$$

令 $t = \sin\varphi = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$,

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int (1-t^2)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int \sum_{i=0}^{n} C_i^n (-t^2)^i \mathrm{d}t. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

注意到:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \int t^{2i}\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n} C_i^n \cdot \frac{1}{2i+1} t^{2i+1} + C \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_i^n \cdot \frac{1}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C \\ &< \infty.\end{aligned}$$

因此, 由 Fubini-Tonelli 定理, $(**)$ 式中的求和與積分順序可以互換:

$$\begin{aligned}I_{2n} &= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \int (-t^2)^i \mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1} t^{2i+1} + C \\ &= \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

肆、研究結論

本文推導得出了 $\forall n \in \mathbb{N}$ 的以下六則公式:

$$\int \arcsin^n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(x))^{n-i} + C,$$

$$\int \arcsin^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x = a \cdot \sum_{i=0}^{n} P_i^n \sin\left(\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arcsin(\frac{x}{a}))^{n-i} + C,$$

$$\int \arccos^n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} P_i^n \cos\left(\arccos(x) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(x))^{n-i} + C,$$

$$\int \arccos^n(\frac{x}{a})\mathrm{d}x = a \cdot \sum_{i=0}^{n} P_i^n \cos\left(\arccos(\frac{x}{a}) + \frac{i\pi}{2}\right)(\arccos(\frac{x}{a}))^{n-i} + C,$$

$$\int x^{2n}\arcsin(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{2n+1}\arcsin(x)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C,$$

$$\int x^{2n}\arccos(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{2n+1}\arccos(x)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{(-1)^i}{2i+1}(1-x^2)^{i+\frac{1}{2}} + C.$$

對於其延伸性問題, 如 n 次反正切與反餘切, 反正割與反餘割函數之不定積分, 都將是筆者未來繼續研究的方向。

參考文獻

1. Krishna B Athreya and Soumendra N Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Vol. 19, Springer, 2006.
2. How do you find the integral of $\int [\arcsin(x)]^n \mathrm{d}x$ if n is an integer? URL https://socratic.org/questions/how-do-you-find-the-integral-of-int-arcsin-x-n-if-is-an-integer, Socratic Q&A, 2015.9.
3. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series: Elementary Functions*, Science, 1981.
4. Anthony Sofo, Integrals of inverse trigonometric and polylogarithmic functions, *The Ramanujan Journal*, **54** (2021), 291-307.

—本文作者投稿時就讀華東台商子女學校 —

勘誤表

第 37 卷 4 期, 第 62 頁 Line -1。

原爲：之處, 敬請各界指證。

應爲：之處, 敬請各界指正。

第 49 卷 1 期, 第 41 頁 Line 10, 有 2 處。

原爲：創新人材。

應爲：創新人才。

第 49 卷 1 期, 第 50 頁最後 2 行, 式子 (5), 有 8 處。

原爲：$(a\ b)$。

應爲：(a, b)。

第 49 卷 1 期, 第 51 頁, Line -5, -10, 式子 (6) 和 (7) 最前面。

原爲：$\max(a.b)$。

應爲：$\max(a, b)$。

第 49 卷 1 期, 第 68 頁, 文獻 4。

原爲：《100個著名初等數學問題: 歷史和解 》。

應爲：《100個著名初等數學問題: 歷史和解答 》。